Title	アルフ不変量とTジーナス(グラフ理論と3次元多様体)
Author(s)	杉下, 幸司
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 575: 117-125
Issue Date	1985-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/99236
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
575巻 1985年 117-125

アルフ不変量とTジーナス

大阪市大理　　杉下　幸司　(Kouji Sugisita)

絡み輪のアルフ不変量は固有な絡み輪（proper link）に対して定義される。ここでは絡み輪が許容的なとき、そのアルフ不変量は成分数が3以下の部分絡み輪のアルフ不変量の和で表されることを述べる。すなわち、

定理1　$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を成分数が3以下の許容的な絡み輪とする。このとき次の公式が成り立つ。

$$a(L) = \sum_3 a(L(3)) + (n-1)\sum_2 a(L(2)) + \frac{n^2-n+2}{2}\sum_1 a(L(1))$$

但し、a(L)はLのアルフ不変量。$\sum_i$は成分数がiであるような部分絡み輪全てについての和。式はmod 2である。

ここで全てのK_i，K_jに対して$lk(K_i, K_j) = 0$となる絡み輪を許容的という。

まず絡み輪のアルフ不変量を定義しよう。その為に結び目Kと絡み輪Lが有関係(related)であることを定義する。Lが$S^3\times[0]$にあり、Kが$S^3\times[1]$にあり、更に$S^3\times[0,1]$に局所平坦な穴あき円板Aがあって$\partial A=L\cup(-K)$となるとき、KはLと有関係であるという。さてLが固有な絡み輪のとき、Lのアルフ不変量をLと有関係な結び目のアルフ不変量で定義する。絡み輪が固有な場合、それと有関係である2つの結び目のアルフ不変量は等しいことが知られている(Robertello)ので、絡み輪のアルフ不変量はちゃんと定義できる。

証明の前に定理1の応用を述べよう。c(L)を成分数がnの絡み輪LのConway多項式のz^{n+1}の係数とすると次の定理が成り立つ。

定理　2　Lが許容的ならば、

$$a(L)=\sum_3 c(L(3))+\sum_2 c(L(2))+\sum_1 c(L(1)) \pmod 2.$$

更に定理1と定理2を繰り返し使うと次を得る。

定理　3　Lが成分数が4以上の許容的な絡み輪ならば、$c(L)\equiv 0 \pmod 2$.

定理2は定理1と村上［1］によって示された次の定理によって示される。

定理（村上）　Lが純粋に固有な（purely proper）な絡み輪ならば、$a(L)\equiv\Sigma\, c(L) \pmod 2$.
但し、Σは自分自身を含めた全ての部分絡み輪についての和。

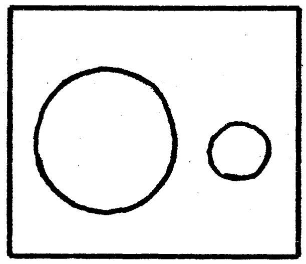
またBrunnian絡み輪について次が成り立つ。

引理　Lが成分数が4以上のBrunnian絡み輪ならば

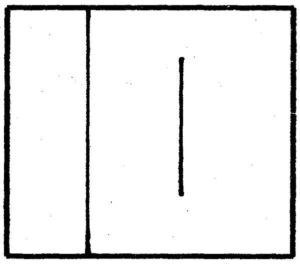
$$a(L)\equiv 0 \pmod 2.$$

次に許容的な絡み輪$L=K_1\cup\ldots\cup K_N$のTジーナスを定義する［2］。これを使って定理1は示される。
Lの各成分K_iに特異円板D_iをはり、$D=D_1\cup\ldots\cup D_n$とおく。Dの特異線の原像は適当な変形をすると次の

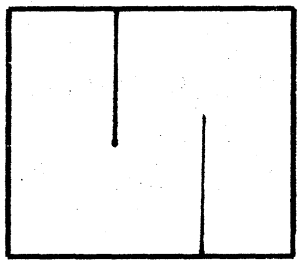
５種類になる。



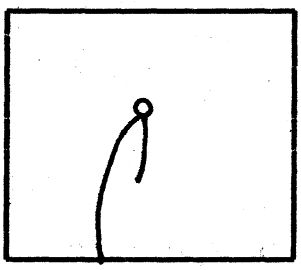
（ａ）



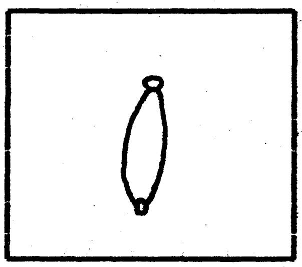
（ｂ）



（ｃ）



（ｄ）



○は分枝点、

（ｅ）

（ａ）を輪状特異線（loop）、（ｂ）をリボン特異線（ribbon）、（ｃ）を留め金特異線（clasp）、（ｄ）を１点分枝特異線（branch with one-point）、（ｅ）を２点分枝特異線（branch with two points）、と呼ぶ。

さて、Ｄ上の３重点を２つの型に分ける為に特異線の原像（２つの線から成っている）に次のように外線（b-line）、内線（i-line）と名付ける。（ｂ）、（ｄ）につ

いては端点が境界まで延びている方を外線、他方を内線と呼ぶ。（a）、（c）、（e）についてはどちらか一方を外線、他方を内線と呼ぶ。

3重点の原像は特異線の原像の交点になっている。今外線と外線の交点になっているとき外外型、外線と内線の交点になっているとき内外型、内線と内線の交点となっているとき内内型と呼ぶ。

3重点pの3つの原像をP_1、P_2、P_3とする。P_i（i=1,2,3）が内外型であるときpをI型の3重点と呼ぶ。一方、P_1が外外型，P_2が内外型，P_3が内内型のときpをII型の3重点という。

さて、絡み輪Lに次の条件を満たす特異円板

$D=D_1 \sqcup . . . \sqcup D_n$をはる。

（1）$\partial D_i = K_i$（i=1,...n）.

（2）各D_iは留め金特異線を持たない。

（3）$D_i \cap D_j$にも留め金特異線はない。

Lが許容的なとき上の条件を満たすDがあることの証明は略する［3］。

このときT（L，D，ρ）でD上のI型3重点の個数

を表す。尚、ρ は(a),(e)の型の特異線の場合、内線・外線の名付け方に任意性があり付け方によってI型3重点の個数が異なるときがある、その名付け方を表すものとする。今、上の条件(1),(2),(3)を満たす様々な特異円板をLにはり、更にρを色々とったときのT(L, D, ρ)の最少値をT(L)で表し、LのTジーナスと呼ぶ。絡み輪のTジーナスについて[2]で結び目のTジーナスについて論じたと同様にして次が成り立つ[2]。

定理 4

(1) T(L)は絡み輪同境の不変量。

(2) $g^*(L) \leqq T(L)$。

但し、$g^*(L)$はLの4次元ジーナス。

また、Tジーナスは絡み輪のアルフ不変量を表している。すなわち、

定理 5 T(L, D, ρ) = a(L) (mod 2).

特にT(L) = a(L) (mod 2).

証明の概略：　Lに先の条件(1),(2),(3)を満たす特異円板Dをはる。今、Lを融合して(fusion)得られる結び目をKとする。融合帯(fusion bands)はD上の3重点の個数を変えないようにとれる。Dと融合帯の結びをD′とするとT(L, D, ρ) = T(K, D', ρ)である。また、KはLと有関係であるからa(L) = a(K)である。よって結び目の場合に示せば充分。以下、概略を述べる。(詳しくは[2]を参照して下さい。)Kは特異円板D'を利用して次の様な絡み輪Bと有関係であることが示せる。BはT(K, D', ρ)個のボロミアン輪といくつかの結んでいない結び目との分離和(split union)である。I型の3重点1個に対応してボロミアン輪1個が対応している。II型の3重点1個に対して成分数が3である自明な絡み輪(trivial link)1つが応じている。ボロミアン輪のアルフ不変量は1であり、アルフ不変量は分離和について足し算が成り立つので
T(K, D', ρ) = a(K) (mod 2)となる。

定理1の証明：　絡み輪Lに先の条件を満たす特異円板$D = D_1 \sqcup ... \sqcup D_n$をはっているものとする。

$D_i \cap D_j \cap D_k$となっているI型3重点の個数を$T(i,j,k)$で表す。$D_i \cap D_i \cap D_j$となっているI型3重点の個数と$D_i \cap D_j \cap D_j$となっているI型3重点の個数との和を$T(i,j)$で表す。また、$D_i \cap D_i \cap D_i$となっているI型3重点の個数を$T(i)$で表す。但し、ここでのi,j,k は全て互いに異なるものとする。

D上のI型3重点の個数を調べると次の様になる。但し、以下の式は mod 2である。

$$a(L)=T(L,D,\rho)=\sum_3 T(i,j,k)+\sum_2 T(i,j)+\sum_1 T(i) \quad \cdots(1)$$

さて、部分絡み輪について調べてみると、

$a(K_i)=T(i)$より $\sum_1 T(i)=\sum_1 a(K_i)$. $\quad \cdots(2)$

また、$a(K_i \cup K_j)=T(i,j)+T(i)+T(j)$より

$\sum_2 a(K_i \cup K_j)=\sum_2 T(i,j)+(n-1)\sum_1 T(i)$だから、

$$\sum_2 T(i,j)=\sum_2 a(K_i \cup K_j)+(n-1)\sum_1 a(K_i). \quad \cdots(3)$$

更に、$a(K_i \cup K_j \cup K_k)=T(i,j,k)+T(i,j)+T(j,k)+T(k,i)+T(i)+T(j)+T(k)$より

$$\sum_3 a(K_i \cup K_j \cup K_k)=\sum_3 T(i,j,k)+(n-2)\sum_2 T(i,j)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\sum_1 T(i)$$

従って、

$$\sum_3 T(i,j,k)=\sum_3 a(K_i \cup K_j \cup K_k)+(n-2)\sum_2 a(K_i \cup K_j)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\sum_1 a(K_i) \quad \cdots(4)$$

(2),(3),(4) 式を(1) 式に代入すると定理1の公式を得る。

参考文献

[1] H. Murakami: The Arf invariant and the Conway polynormial of links, Math. Semi. Note Kobe Univ. vol.11(1983), 335-344.

[2] Murakami and Sugishita: Triple Points and Knot Cobordism, Kobe J. Math. 1 (1984),1-16

[3] K. Sugisita: Triple Points and Knot Cobordism, Master Thesis, Osaka City Univ. (1983)